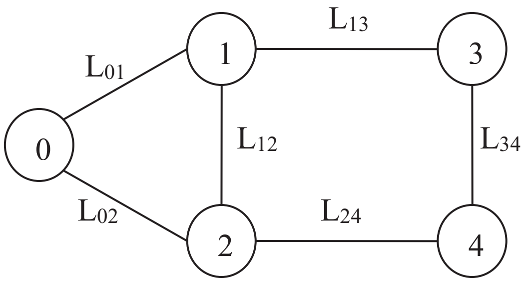
PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

1 Système matériel et problème de statique

Dans un mécanisme, on note **E** un système matériel, un ensemble de solides isolés qui font l'objet de l'étude. Le complémentaire de **E** par rapport à l'univers matériel est noté $\overline{\mathbf{E}}$.



Dans un problème de statiques, les objectifs sont :

-
-
-

2 Principe fondamental de la statique

2.1 Equilibre d'un système matériel

Un système matériel **E** est en équilibre par rapport à un repère $\Re$ si au cours du temps, chaque point de **E** conserve une position fixe par rapport au repère $\Re$.

2.2 Enoncé du principe fondamental de la statique :

Si un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère galiléen, alors le torseur des actions mécaniques extérieures à E soit nul :

$$\left\{\mathcal{F}_{\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}}\right\} = \{0\}$$

2.3 Théorème généraux de la statique

Posons :$\left\{\mathcal{F}_{\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R}\left(\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}\right) \\ \overrightarrow{M}_A\left(\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}\right) \end{array}\right\}_A$

Théorème de la résultante statique (T.R.S.) : $\overrightarrow{R}\left(\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}\right) = \overrightarrow{0}$

Théorème du moment statique en A (T.M.S.) : $\overrightarrow{M}_A\left(\overline{\mathbf{E}}\to\mathbf{E}\right) = \overrightarrow{0}$

2.4 Condition nécessaire et suffisante

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen, il faut que :

- il soit en équilibre à l'instant initial;
- pour toute sous partie **e** de **E** : $\left\{\mathcal{F}_{\overline{\mathbf{e}}\to\mathbf{e}}\right\} = \left\{0\right\}$

3 Théorème des actions mutuelles

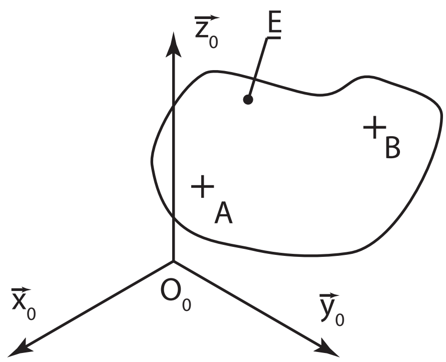
L'action mécanique d'un système matériel **1** sur un système matériel **2** est opposée à l'action mécanique de **2** sur **1**.

$$\left\{\mathcal{F}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}\right\} = -\left\{\mathcal{F}_{\mathbf{2}\to\mathbf{1}}\right\}$$

4 Cas particuliers : Ensemble matériel soumis à l'action de 2 glisseurs

Soit un ensemble matériel **E** en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de deux forces $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A, et $\overrightarrow{F_B}$ appliquée en B. Le principe fondamental de la statique se traduit par :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} & = & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{F_B} \wedge \overrightarrow{BA} & = & \overrightarrow{0} \end{array}$$



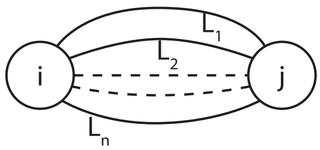
Conclusion : Si un solide en équilibre est soumis à deux glisseurs, alors ces glisseurs sont :

-
-
-

5 Modèle statique des associations de liaisons

5.1 Liaisons en parallèle

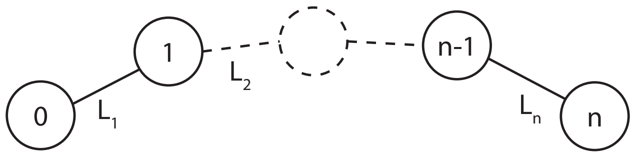
Si deux solides **i** et **j** sont liés par n liaisons en parallèle, alors le torseur d'action mécanique de la liaison équivalente est la somme des torseurs d'action mécanique de chaque liaison.



$$\left\{\mathcal{F}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}^{L_{eq}}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathcal{F}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}^{L_i}\right\}$$

5.2 Liaisons en série

Si deux solides en équilibre statique, **0** et **n**, sont liés par n liaisons en série, alors les torseurs d'action mécanique s'égalisent.



$$\left\{\mathcal{F}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}^{L_{eq}}\right\} = \left\{\mathcal{F}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}^{L_1}\right\} = \cdots = \left\{\mathcal{F}_{\mathbf{i}\to\mathbf{j}}^{L_n}\right\}$$

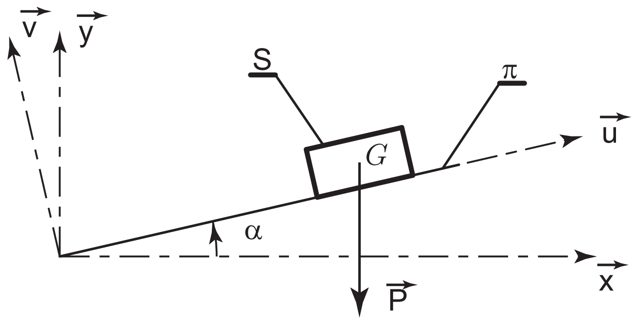
Les composantes nulles de chaque torseur d'action sont imposées aux autres torseurs. Les composantes non nulles sont égales.

6 Cas du frottement

6.1 Mise en évidence

Soit **S** un solide parallélépipédique de masse M, de centre gravité G, placé sur un plan incliné π formant un angle α avec l'horizontale. Lorsque α varie de 0 à 90°, **S** commence à glisser à partir d'un angle limite α_l.
On constate deux comportements :

- $\alpha < \alpha_l$: **S** est statique. Il y a adhérence ;
- $\alpha \geq \alpha_l$: **S** glisse sur π. Il y a frottement. (Pour $\alpha = \alpha_l$, on est alors à la limite du glissement.)



Soit **S** un solide parallélépipédique de masse M, de centre gravité G, placé sur un plan incliné π formant un angle α avec l'horizontale.
Lorsque α varie de 0 à 90°, **S** commence à glisser à partir d'un angle limite α_l.
On constate deux comportements :

- $\alpha < \alpha_l$: **S** est statique. Il y a adhérence ;
- $\alpha \geq \alpha_l$: **S** glisse sur π. Il y a frottement. (Pour $\alpha = \alpha_l$, on est alors à la limite du glissement.)

<u>Bilan des actions mécaniques sur **S**</u>

Poids : $\left\{\mathcal{F}_{g\to\mathbf{S}}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & / \\ -Mg & / \\ / & 0 \end{array}\right\}_{G,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$; Appui-plan : $\left\{\mathcal{F}_{\pi\to\mathbf{S}}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array}\right\}$

Etude de l'adhérence : déterminons l'action de π sur **S**.
Théorème de la résultante statique : $-M\overrightarrow{g}+$

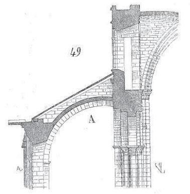
En projection sur $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}: \\ \overrightarrow{v}:\end{array}\right.$

L'effort tangentiel T au contact (l'effort de frottement) ne dépend pas de l'effort normal N. Il est **déterminé par l'équilibre statique**, c'est-à-dire qu'il se calcule par le principe fondamental de la statique.

Détermination de la condition géométrique d'équilibre
Hypothèse : à la limite du glissement : $|T| = f.\,|N|$

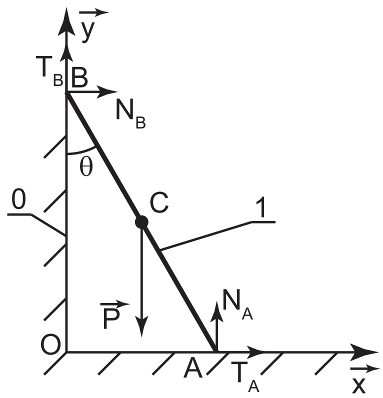
Or $\frac{|T|}{|N|} = \frac{Mg\cdot\sin\alpha_l}{Mg\cdot\cos\alpha_l} = \tan\alpha_l$, donc $f = \tan\alpha_l$. α_l est égal à l'angle de frottement, noté φ.

6.2 Application : l'arc-boutement



Définition : L'arc-boutement caractérise un système à maintenir un **équilibre indépendamment du module des actions extérieures**. (conditions sur la géométrie et non sur la norme des actions).

Exemple : échelle sur un mur



Une échelle, de longueur L, est soumise à un poids $\overrightarrow{P} = -P\overrightarrow{y}$ en son milieu C et à deux forces en $\overrightarrow{F_A} = T_A\overrightarrow{x} + N_A\overrightarrow{y}$ A et $\overrightarrow{F_B} = N_B\overrightarrow{x} + T_B\overrightarrow{y}$ en B.

Hypothèses :

- non frottement en B : $T_B = 0$;
- frottement de coefficient f en A : $|T_A| \leq f.\,|N_A|$.

Déterminons la ou les conditions d'équilibre statique de l'échelle :
Isolons l'échelle. Bilan des actions mécanique extérieures :

Poids : $\left\{\mathcal{F}_{g\to1}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array}\right\}$; $\left\{\mathcal{F}_{0\to1}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array}\right\}_A$; $\left\{\mathcal{F}_{0\to1}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array}\right\}_B$

Théorème de la résultante statique :
en projection selon $\overrightarrow{x}$: $N_B + T_A = 0$
en projection selon $\overrightarrow{y}$: $N_A – P = 0$
Théorème du moment statique en A, en projection selon $\overrightarrow{z}$:

$-L\cos\theta\cdot N_B + \frac{L}{2}\sin\theta\cdot P = 0$

Donc : $N_B = -T_A = \frac{P}{2}\tan\theta$
La loi de Coulomb indique qu'il y a adhérence (équilibre statique) si $|T_A| < f.\,|N_A|$.

or : $\left|\frac{T_A}{N_A}\right| = \frac{\frac{P}{2}\tan\theta}{P} = \frac{\tan\theta}{2} < f$

Il y a équilibre statique si $\frac{\tan\theta}{2} < f$ ou si $\theta < \arctan(2f)$, quelque soit l'intensité du poids.