

MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

1 Actions mécaniques

1.1 Définitions

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un ensemble matériel au repos, de créer ou de modifier un mouvement, de déformer un solide.

Les actions mécaniques sont de deux sortes :

Actions à distance encore appelées actions volumiques car elles s'exercent en tout point du système matériel (action magnétique ou action de la pesanteur).

Actions de contact (action exercée par l'intermédiaire d'une liaison, par la pression d'un fluide, ...) encore appelées actions surfaciques car elles s'exercent au niveau d'une surface d'un objet.

1.2 Modélisation des actions mécaniques

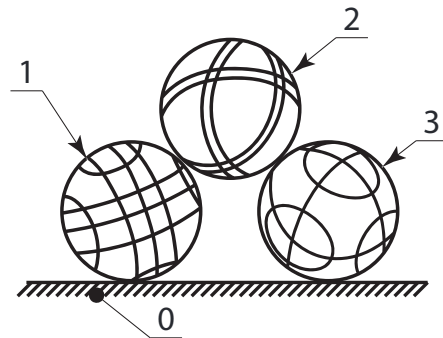
La modélisation des actions mécaniques peut se faire d'un point de vue local ou d'un point de vue global suivant l'objectif de l'étude envisagée :

- La modélisation locale a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce ;
- La modélisation globale, par un torseur, caractérise globalement l'action mécanique.

1.3 Frontière d'isolement

Soient 3 corps **1**, **2**, et **3** en contact entre eux et avec un bâti **0**

- Si on considère **2** (on note « on isole **2** »), il est soumis à une action mécanique de **1** sur **2**, notée $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ et à une action mécanique de **3** sur **2** notée $\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{2}$.
- Si on considère l'ensemble $E = \{\mathbf{2} \cup \mathbf{3}\}$ (on note « on isole $E = \{\mathbf{2} \cup \mathbf{3}\}$ »), il est soumis à une action mécanique externe $\mathbf{1} \rightarrow E$; $\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{2}$ est une action mécanique interne à E .



2 Modélisation globale d'une action mécanique

2.1 Introduction

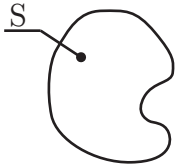
2.2 Expression générale

2.3 Torseur à résultante

Un torseur d'action mécanique « à résultante » est un torseur dont le moment en un point A est nul :

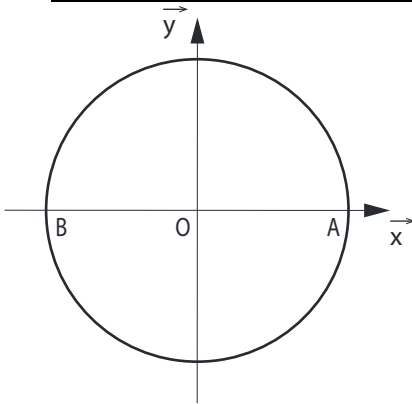
$$\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Propriété :

Exemple 1 : Force au bout d'une poignée de porteExemple 2 : l'action de la gravité**2.4 Torseur Couple**

Un torseur d'action mécanique est un couple si sa résultante est nulle :

$$\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A$$

Exemple 3 : Deux mains sur un volant**2.5 Décomposition d'un torseur quelconque**

Une action mécanique quelconque, $\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A$, peut se décomposer en :

3 Liaisons normalisées sans frottement

Pour toutes les liaisons normalisées entre deux solides **1** et **2** étudiées en cinématiques, déterminons les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact (surfaccique, linéique ou ponctuel) que la liaison peut transmettre lorsque le contact est supposé sans frottement. Le torseur d'action mécanique transmissible du solide **1** sur le solide **2** s'écrit au point O ,

origine du repère locale associé à la liaison : $\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \\ \vec{M}_A(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \end{array} \right\}_A$

Posons, dans la base du repère local à la liaison, $\vec{R}(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z}$ et $\vec{M}_A(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z}$. Le torseur d'action s'écrit alors :

$$\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l|l} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Suivant la nature de la liaison, une ou plusieurs composantes de ce torseur sont nulles et il prend une forme particulière appelée forme canonique.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

4 Action mécanique dans une liaison avec frottement

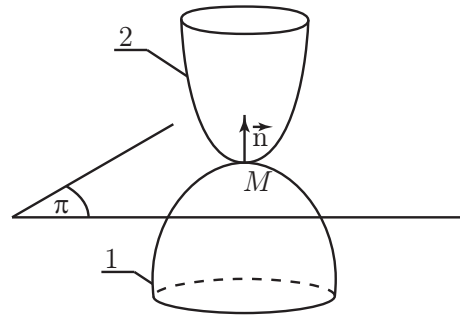
4.1 Posons du problème

Considérons deux solides **1** et **2** en contact au point M , de plan tangent au contact (π) . Décomposons l'effort de contact : $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) = \vec{N}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) + \vec{T}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$

avec : $\vec{N}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \perp (\pi)$ et $\vec{T}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \in (\pi)$

On appelle :

- $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: effort au point M de **1** sur **2**
- $\vec{N}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: effort normal des forces de contact au point M de l'action de **1** sur **2**
- $\vec{T}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: effort tangentiel des forces de contact au point M de l'action de **1** sur **2**



4.2 Lois de Coulomb

Notons $\vec{V}(M \in 2/1)$ le vecteur vitesse de glissement, au point M , du mouvement du solide **2** par rapport au solide **1**. Ce vecteur est situé dans le plan (π) .

Premier cas : $\vec{V}(M \in 2/1) \neq \vec{0}$ (on dit qu'il y a frottement au point M entre les solides **1** et **2**).

Interprétation géométrique : Si on considère l'angle φ , appelé angle de frottement, tel que $f = \tan(\varphi)$, alors la force de contact $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ se situe sur le bord du cône de révolution, appelé cône de frottement, de sommet M , d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ . La position de $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ est fixée sur le cône de frottement par l'orientation du vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(M \in 2/1)$.

Deuxième cas : $\vec{V}(M \in 2/1) = \vec{0}$ (on dit qu'il y a adhérence au point M entre les solides **1** et **2**).

$$\|\vec{T}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \leq f_0 \cdot \|\vec{N}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\|$$

où f_0 est le coefficient d'adhérence des matériaux **1** et **2**.

Interprétation géométrique : Si on considère l'angle φ_0 , appelé angle d'adhérence, tel que $f_0 = \tan(\varphi_0)$, alors la force de contact $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ se situe à l'intérieur ou sur le bord du cône de révolution, appelé cône d'adhérence, de sommet M , d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ_0 .

La position de $\vec{F}_M(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$ n'est pas connue, a priori, à l'intérieur ou sur le bord du cône d'adhérence.

4.3 Adhérence et frottement

La détermination expérimentale des coefficients de frottement et d'adhérence est délicate à cause de l'influence de nombreux paramètres. Toutefois on admet qu'ils dépendent essentiellement de la nature des matériaux en contact.

Le tableau suivant donne des ordres de grandeur des coefficients pour quelques couples de matériaux :

Matériaux en contact	Frottement f	Adhérence f_0
Acier sur acier	de 0,1 à 0,2	de 0,15 à 0,25
Acier sur bronze	de 0,12 à 0,2	de 0,15 à 0,2
Acier sur matériau de friction	de 0,2 à 0,35	de 0,3 à 0,4
Pneu sur revêtement routière	de 0,3 à 0,6	de 0,6 à 1,2

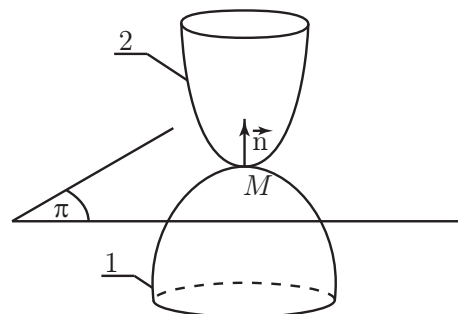
Remarques : le coefficient d'adhérence est toujours supérieur au coefficient de frottement ($f_0 > f$), mais par mesure de simplification, on confond souvent ces deux coefficients.

5 Cas général : Résistance aux mouvements

Considérons deux solides **1** et **2** en contact ponctuel en un point I (en réalité, le contact s'effectue sur une petite surface S contenant le point I).

Notons (π) le plan tangent au contact en I et $\{\mathcal{F}_{\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}}\}$ le torseur d'action mécanique de **1** sur **2**, que l'on décompose en :

$$\{\mathcal{F}_{\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) + \vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \\ \vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) + \vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \end{array} \right\}_I$$



On appelle :

- $\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: composante normale de la résultante ou effort normal
- $\vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: composante tangentielle de la résultante ou effort tangentiel
- $\vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: composante normale du moment en I ou moment de résistance au pivotement
- $\vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})$: composante tangentielle du moment en I ou moment de résistance au roulement

Afin d'introduire, dans le cas du contact ponctuel, des lois de résistance aux mouvements (analogues aux lois de Coulomb) considérons au point I la torseur cinématique du mouvement du solide $\mathbf{2}$ par rapport au solide $\mathbf{1}$:

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}^n(2/1) + \vec{\Omega}^t(2/1) \\ \vec{V}(I \in 2/1) \end{array} \right\}_I$$

avec :

- $\vec{\Omega}^n(2/1)$: vecteur vitesse de pivotement
- $\vec{\Omega}^t(2/1)$: vecteur vitesse de roulement
- $\vec{V}(I \in 2/1)$: la vitesse de glissement (tangente au contact)

Résistance au glissement

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \wedge \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0} \\ \vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \cdot \vec{V}(I \in 2/1) < 0 \\ \|\vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| = f \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{cases} \\ \text{Si } \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0} &\Rightarrow \|\vec{T}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \leq f \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{aligned}$$

f : coefficient de frottement (de Coulomb ou de frottement sec)

Résistance au pivotement

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{\Omega}^n(2/1) \neq \vec{0} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \wedge \vec{\Omega}^n(2/1) = \vec{0} \\ \vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \cdot \vec{\Omega}^n(2/1) < 0 \\ \|\vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| = \delta \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{cases} \\ \text{Si } \vec{\Omega}^n(2/1) = \vec{0} &\Rightarrow \|\vec{M}_I^n(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \leq \delta \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{aligned}$$

δ : paramètre de résistance au pivotement (homogène à une longueur)

Résistance au roulement

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{\Omega}^t(2/1) \neq \vec{0} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \wedge \vec{\Omega}^t(2/1) = \vec{0} \\ \vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}) \cdot \vec{\Omega}^t(2/1) < 0 \\ \|\vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| = \eta \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{cases} \\ \text{Si } \vec{\Omega}^t(2/1) = \vec{0} &\Rightarrow \|\vec{M}_I^t(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \leq \eta \cdot \|\vec{N}_I(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\| \end{aligned}$$

6 Hypothèse d'un problème plan

On peut faire l'hypothèse d'un problème plan si :

